Задание № 4 Методы интегрирования

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**21.1** **Интегрирование с рационализацией подынтегральных функций**

К рациональным функциям относятся целые рациональные функции (многочлены) и дробные рациональные функции (рациональные дроби).

В случае если удается точно разложить знаменатель на множители первой и второй степени, то интеграл от рациональной дроби может быть выражен в элементарных функциях. Поэтому другие виды функций имеет смысл попытаться представить в виде рациональной функции с помощью замены переменной. Если это удается, то исходный интеграл может быть найден как интеграл от рациональной функции.

Операции преобразования исходной подынтегральной функции в рациональную дробь с помощью замены переменной называются *рационализацией интеграла*. Рационализировать можно такие иррациональные, трансцендентные функции, которые с помощью одной или нескольких замен переменных представляются в виде рациональных функций нескольких переменных.

**М21.1.1 Определение.** Рациональной функцией нескольких переменных  называется любое алгебраическое выражение , в котором переменные  объединены с помощью только арифметических действий (и, в частности, с помощью возведения в целую степень), где  - условное обозначение рациональной функции.

Пусть исходную функцию  с помощью введения нескольких переменных можно представить рациональной функцией этих переменных: , где . Тогда исходную функцию  с помощью обратной подстановки  можно привести к рациональной функции одной новой переменной : .

**М21.1.2 Пример.** Рационализировать иррациональную функцию .

*Решение:* 

 - функция, являющаяся рациональной как при  , так и при  .

Далее интегралы, подынтегральные функции которых приводятся к рациональным функциям с помощью замены переменных, будем кратко называть *рациональными интегралами*.

**21.2** **Вычисление рациональных интегралов от тригонометрических функций**

Пусть трансцендентную функцию, содержащую тригонометрические функции  и  можно рационализировать. Тогда рациональные интегралы вида  можно решать методом замены переменной с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*  при . (1)

В этом случае

, , , . (2)

После замены переменной получим , т.е. интеграл от рациональной дроби.

**М21.2.1 Пример 1.** Найти интеграл 

*Решение:* используем универсальную тригонометрическую подстановку;







.

**М21.2.2** Пусть подынтегральная функция  является нечетной относительно : . В этом случае лучше использовать подстановку .

**М25.2.3 Пример 1.** Найти интеграл .

*Решение:* подынтегральная функция является нечетной относительно . Используем подстановку , при этом предварительно выразим  через .

.

Подынтегральная функция с новым аргументом является неправильной рациональной дробью.

Разделив числитель на знаменатель, неправильную рациональную дробь представим в виде суммы целой части и правильной дроби: . Тогда получим:  **М21.2.4** Если подынтегральная функция  является нечетной относительно : , то используют подстановку .

**М21.2.5 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* поскольку подынтегральная функция является нечетной , то используем подстановку :



**М21.2.6** Если подынтегральная функция  является четной относительно  и , т.е. , то целесообразно использовать подстановку , . Из тригонометрии известно, что , отсюда , . Тогда .

**М21.2.7 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* подынтегральная функция является четной относительно  и .



.

**М21.2.8** В заключение в качестве важного частного случая рассмотрим интегралы вида , где  - натуральные числа.

Если хотя бы одно из чисел  нечетно, то подынтегральная функция является нечетной либо относительно синуса, либо относительно косинуса, что позволяет применить замену  или .

Если оба числа  четные, то подынтегральная функция является четной относительно  и , что позволяет применить подстановку , .

**21.3** **Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих радикалы**

**М21.3.1** Пусть подынтегральная функция является рациональной функцией от радикалов различных степеней (в частном случае от одного радикала): , где  - натуральные числа,  (в частных случаях может быть  или даже );  - действительные числа и .

Тогда интегралы вида  приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью подстановки , где  - наименьшее общее кратное чисел  (НОК).

**М21.3.2 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* . Прямая подстановка , : 





.

**21.4** **Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих квадратные радикалы из квадратных двучленов**

Интегралы с подынтегральными функциями, содержащими выражения , приводятся к рациональным интегралам вида с помощью следующих тригонометрических подстановок:

**М21.4.1**  - подстановка  или ;

**М21.4.2**  - подстановка  или ;

**М21.4.3**  - подстановка  или ;

*Замечание:* при применении подстановки  к выражению получим . Но, поскольку, областью существования функции  является интервал  и , то . Но в интервале  функция  и поэтому .

Аналогично 

**М21.4.4 Пример 1.** Найти интеграл .

*Решение:* 





.

**М21.4.5 Пример 2.** Найти .

*Решение:* 

.

**М21.4.6 Пример3.** Найти интеграл .





.

С помощью рассмотренных интегралов можно интегрировать функции, содержащие квадратные корни из квадратичных трехчленов вида . Квадратные трехчлены в таких интегралах предварительно методом дополнения до полных квадратов приводятся к двучленам  и затем используются вышеуказанные тригонометрические подстановки.

**М21.4.7 Пример.** Найти интеграл .

Решение: 





**Самостоятельная работа:**

13.4.1. Используя подходящую замену переменной, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ; ж) ; з) ; и) 

13.5.1. Используя подходящую замену переменной, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ;

13.5.2. Используя подходящую замену переменной, найти интегралы: а) ; б) ;

13.6.1. Применяя подходящую замену переменной, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ;

13.6.2. Применяя подходящую замену переменной, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ;

**Ответы:**

**13.4.1.**а) ; б) ; в) ; г) ;

д); е) ; ж) ;

з) ;

и) ;

**13.5.1.** а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) ; е) ;

**13.5.2.** а) ;

б) ;

**13.6.1.** а) ; б) ;

в) ; г) ;

**13.6.2.** а) ;

б);

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;